NOKTA

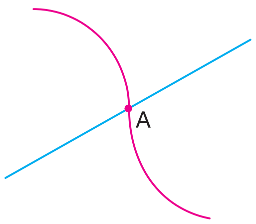
Herhangi bir büyüklüğü (eni, boyu, yüksekliği) olmayan ve yer belirten geometrik bir kavram olarak anlamlandırabiliriz.

- ➢ Geceleyin gökyüzünde yıldızların uzaktan görünümü bir nokta modelidir.

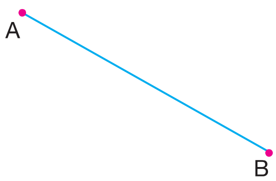
- ✓ Genellikle büyük harfle gösterilir.

- ✓ Boyutsuzdur.

- ➢ İki çizginin kesim yeri bir nokta modelidir.



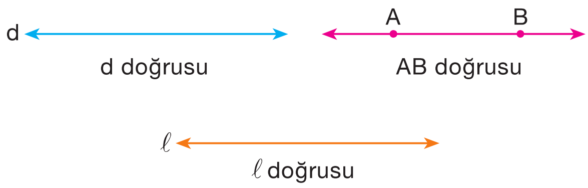
- ➢ Bir doğru parçasının uçları bir nokta modelidir.



DOĞRU

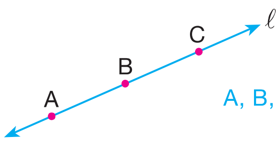
Eni ve yüksekliği olmayan, düz ve uzunluğu sürekli iki yöne uzatılabilen bir kavram olarak anlamlandırabiliriz.

Doğrular ya küçük harflerle ya da üzerinde bulunan iki nokta ile gösterilir.



Doğrusal (doğrudaş) Noktalar

Aynı doğru üzerinde bulunan noktalardır.



A, B, C noktaları doğrusaldır.
(doğrudaştır)

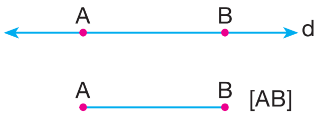
IŞIN

Bir doğru üzerinde bir noktadan başlayıp yine doğru üzerinde sürekli olarak tek yöne uzatılabilen uzunluğu sınırsız olan geometrik terimdir.

[AB ışını

DOĞRU PARÇASI

Bir doğru üzerindeki herhangi iki nokta ve bu noktalar arasında kalan tüm noktalar kümesidir.



[AB] nın uzunluğu $|AB|$ ya da $|BA|$ ile gösterilir.

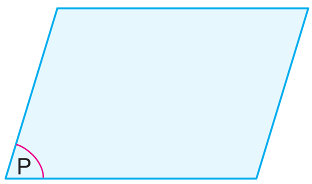
✓ [AB] : AB doğru parçası

✓ $|AB|$: AB doğru parçasının uzunluğu

DÜZLEM

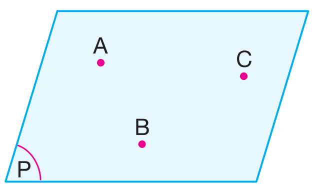
Uzunluğu ve eni her yönden sınırsız, kalınlığı bulunmayan geometrik bir kavram olarak düşünebiliriz.
(Genellikle P, E ile gösterilir.)

➤ Bir paralelkenarsal bölge düzlem modeli olarak kullanılabilir.



➤ Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.

➤ Bir kitabı en az üç parmağınızın uçlarında taşıdığınızı düşünün.

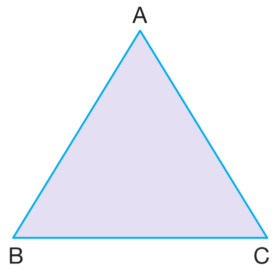


ÜÇGENLER

Tanım : Doğrusal olmayan üç nokta, A, B, C olsun.

[AB], [AC] ve [BC] doğru parçalarının birleştiril- mesi ile elde edilen şekle üçgen denir.

Yani, $\widehat{ABC} = [AB] \cup [AC] \cup [BC]$



[AB], [AC], [BC] → Kenar

A, B, C → Köşe

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ → Açı

Üçgenin Temel Elemanları

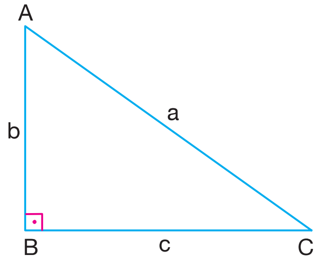
$\left.\begin{array}{l}[AB],\ [AC],\ [BC] \\ A,\ B,\ C \text{ köşeleri} \\ \widehat{BAC},\ \widehat{ABC},\ \widehat{ACB}\end{array}\right\}$ üçgenin temel elemanlarıdır.

ÜÇGEN ÇEŞİTLERİ

Açılarına göre üçgenler	Kenarlarına göre üçgenler
• Geniş açılı üçgen	• Çeşitkenar üçgen
• Dik açılı üçgen	• İkizkenar üçgen
• Dar açılı üçgen	• Eşkenar üçgen

DİK ÜÇGEN

Bir açısının ölçüsü 90° olan üçgendir.



a → Hipotenüs uzunluğu

b, c → Dik kenar uzunlukları

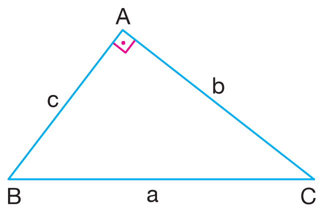
hipotenüs en büyük kenardır.

max {a, b, c} = a

Özellikleri :

Pisagor Bağıntısı :

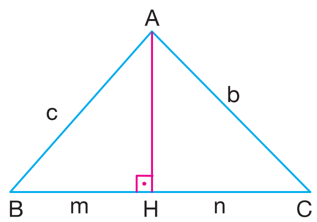
Bir dik üçgende hipotenüs uzunluğunun karesi dik kenar uzunluklarının kareleri toplamına eşittir.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

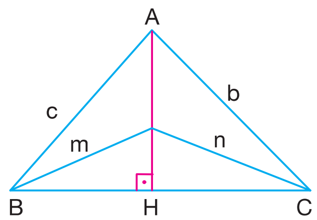
Pisagor Bağıntısının Bazı Sonuçları :

1.



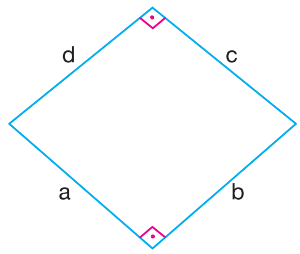
$m^2 + b^2 = c^2 + n^2$

2.



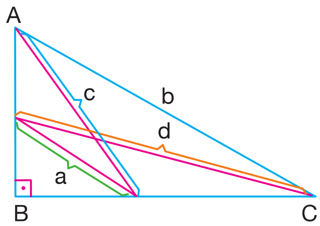
$m^2 + b^2 = c^2 + n^2$

3.



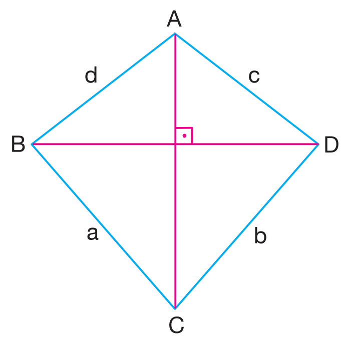
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

4.



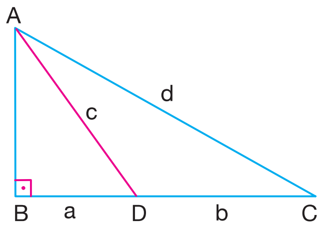
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

5.



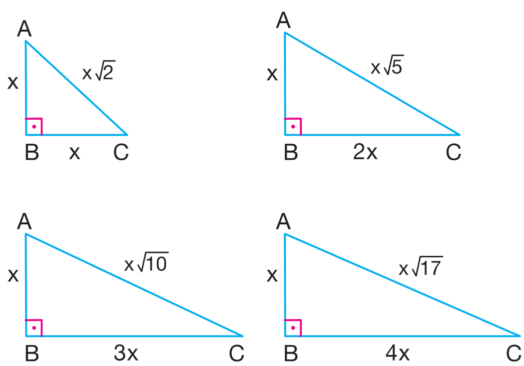
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

6.

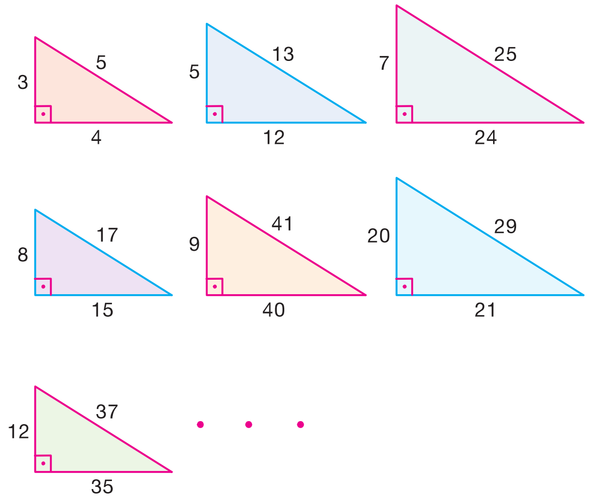


$a^2 + d^2 = (a + b)^2 + c^2$

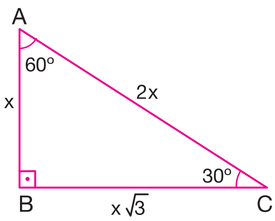
7.

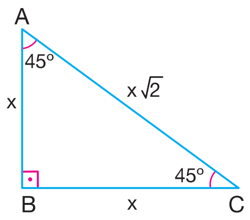


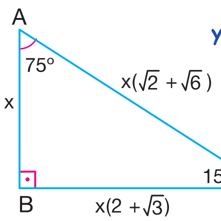
Kenarları Tam sayılı Dik Üçgenler :



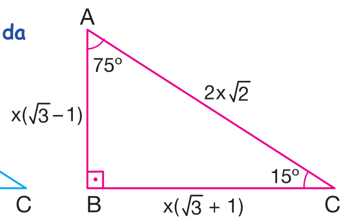
Özel Açılı Dik Üçgenler :

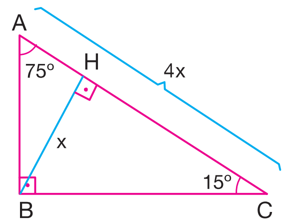


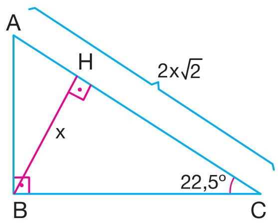




ya da

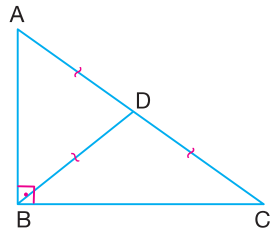


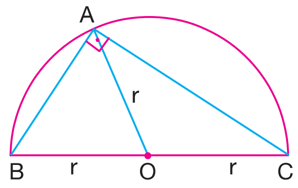




MUHTEŞEM ÜÇLÜ

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir.

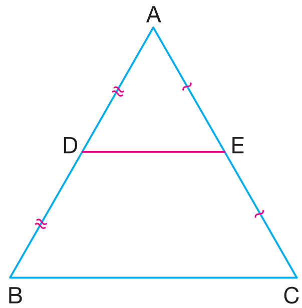




Orta Taban :

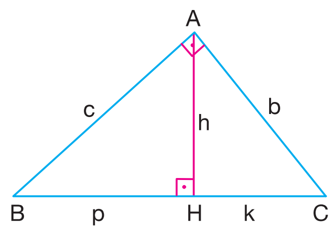
Bir üçgenin herhangi iki kenarının orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen doğru parçasına orta taban denir.

Orta taban üçüncü kenara paralel olup uzunlukça yarısına eşittir.



- D : [AB] nın orta noktası
- E : [AC] nın orta noktası
- [DE] : Orta taban ve DE // BC,
- $|BC| = 2|DE|$

ÖKLİD BAĞINTILARI



ABC dik üçgeninde
BA ⊥ AC
AH ⊥ BC ise

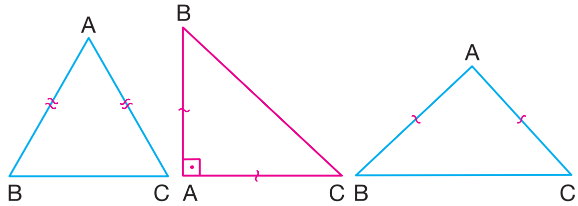
$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{HBA} \sim \overset{\triangle}{HAC}$ (A.A) olup

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= p \cdot k \\ b^2 &= k(k + p) \\ c^2 &= p(p + k) \end{aligned}\right\} \text{ bağıntılarına Öklit bağıntıları denir.}$$

"Ayrıca alan eşitliğinden b . c = h(p + k) yazılabilir."

İKİZKENAR ÜÇGEN

En az iki açısı eş olan üçgendir.



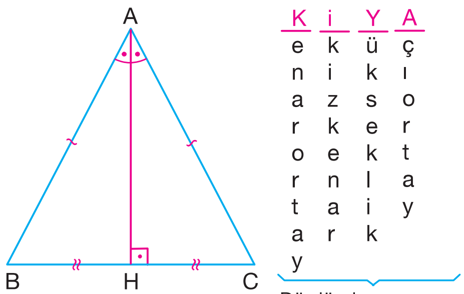
İkizkenarlar → [AB], [AC]

Taban → [BC]

A → Tepe noktası

Taban açıları → $m(\widehat{ABC})$, $m(\widehat{ACB})$

- Tepeden inilen dikme tabanı ve tepe açısını ortalar.

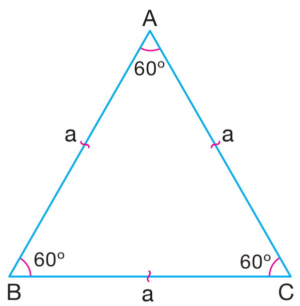


Dördünden en az ikisi varsa hepsi vardır.

$|AB| = |AC|$ ve $AH \perp BC$ ise $|BH| = |HC|$ ve [AH] açıortaydır.

EŞKENAR ÜÇGEN

Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olan üçgendir. Dolayısıyla tüm iç açıların ölçüleri 60° dir.

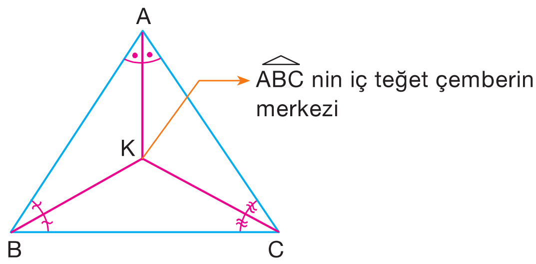


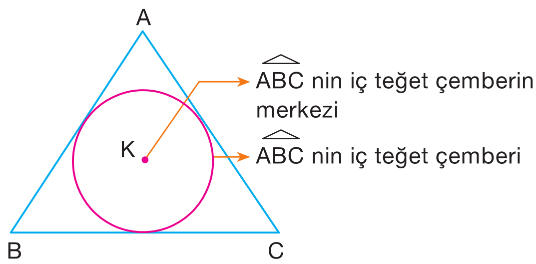
$Ç(\widehat{ABC}) = 3a$

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a^2 . \sqrt{3}}{4}$

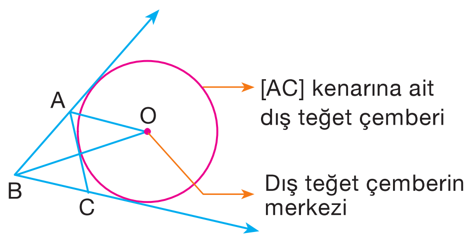
Üçgenlerde Kenarortay ve Açıortayların Kesim Noktaları

- Bir üçgenin iç açıortayları bir noktada kesişir.
- Açıortayların kesim noktası üçgenin kenarlarına içten teğet olan çemberin merkezidir.
- Bu çembere de **iç teğet çemberi** denir.

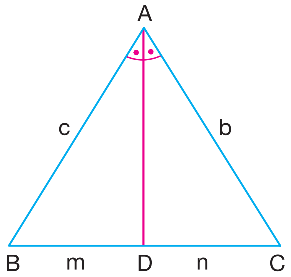




- Bir üçgende bir iç açıortay ile bir dış açıortayın kesim noktasına üçgenin dış teğet çemberin merkezi denir.
- Bu merkezler üçgeninin bir kenarına ve diğer iki kenarın uzantılarına teğet olan çemberlerin merkezleridir.
- Bu çemberlere dış teğet çemberi denir.



İÇ AÇIORTAY TEOREMİ

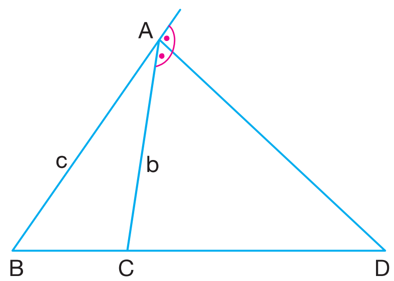


ABC üçgeninde,

[AD] iç açıortay olmak üzere;

$\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ eşitliğine iç açıortay teoremi denir.

DIŞ AÇIORTAY TEOREMİ



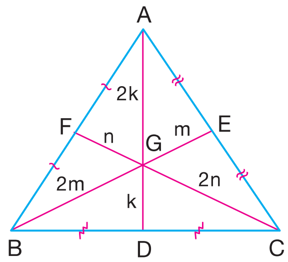
ABC üçgeninde,

[AD] dış açıortay olmak üzere;

$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{b}{c}$ eşitliğine dış açıortay teoremi denir.

KENARORTAY

- Bir üçgenin üç kenarortayı aynı noktadan geçer.
- Bu noktaya üçgensel bölgenin ağırlık merkezi denir.
- Bu nokta genellikle G (gravity) ile gösterilir.
- Bu nokta üçgenin kenarortaylarını köşeden 2 kat kenardan 1 kat olacak şekilde ayırır.



$|BD| = |DC|$

$|AF| = |FB|$

$|AE| = |EC|$

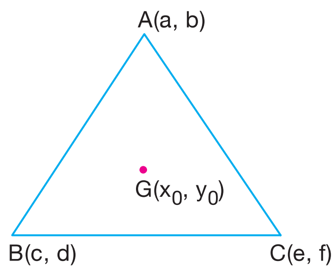
$AD \cap BE \cap CF = \{G\}$

$$\frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|AG|}{|GD|} = \frac{|CG|}{|GF|} = 2$$

Köşelerinin koordinatları

- A(a, b), B(c, d) , C(e, f)

olan ABC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi G noktası ise;

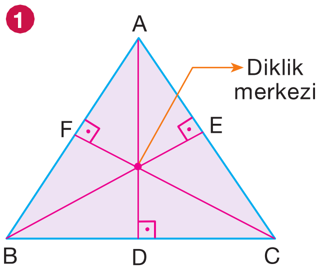


$$x_0 = \frac{a+c+e}{3}$$

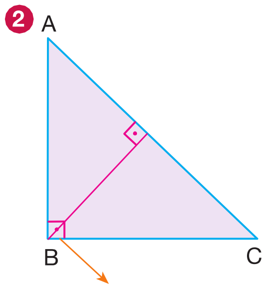
$$y_0 = \frac{b+d+f}{3}$$

YÜKSEKLİK

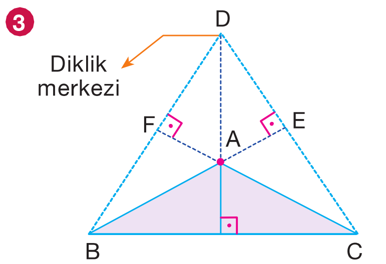
- Bir üçgenin üç yüksekliği bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin diklik merkezi denir.



ABC dar açılı üçgenin diklik merkezi iç bölgededir.



ABC dik üçgeninin diklik merkezi dik olan köşedir.



ABC geniş açılı üçgen olup diklik merkezi dış bölgededir.

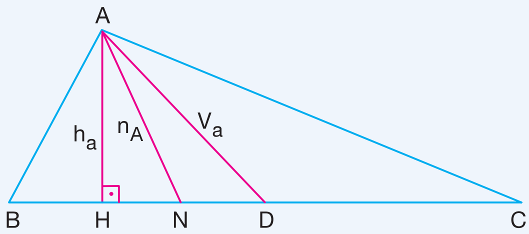
Not

- Bir üçgenin açıortayı (n_A), yüksekliği (h_a) ve kenarortayı (V_a) arasında,

$$h_a \leq n_A \leq V_a$$

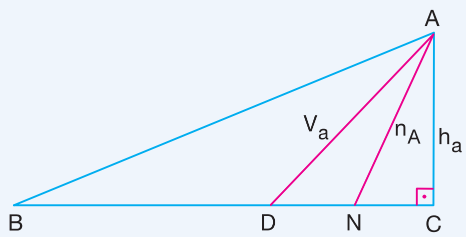
eşitsizliği yazılabilir.

1. Durum : ABC çeşitkenar üçgen



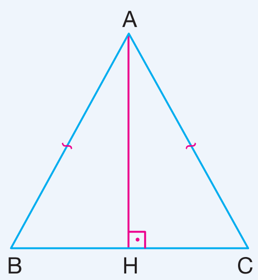
$$h_a < n_A < V_a$$

2. Durum : ABC dik üçgen



$$h_a < n_A < V_a$$

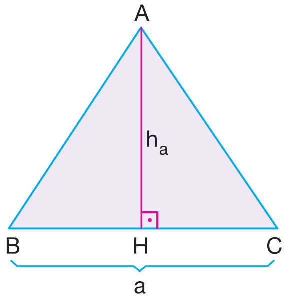
3. Durum : ABC ikizkenar üçgen



$$h_a = n_A = V_a = |AH|$$

BİR ÜÇGENSEL BÖLGENİN ALANI

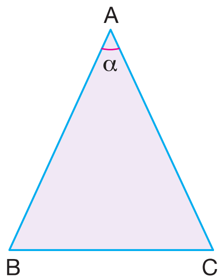
Bir üçgensel bölgenin alanı herhangi bir kenarın uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

SONUÇLAR :

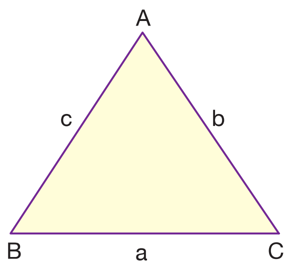
1. İki kenarı ile bu kenarlar arasındaki açısı belli olan üçgenin alanı,



$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$ elde edilir.

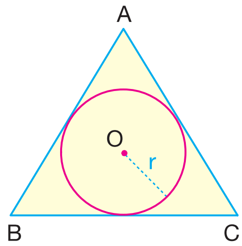
2. Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları

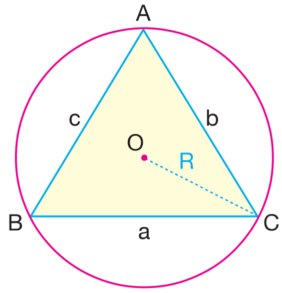
a, b, c ve $a + b + c = 2u$ olmak üzere,



$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)}$ elde edilir.

3. Bir ABC üçgeninde çevrel çemberin yarıçapı R ve iç teğet çemberin yarıçapı r ise,

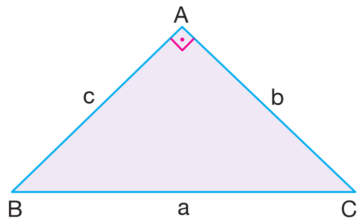




$A(\widehat{ABC}) = u \cdot r$

$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ ile elde edilir.

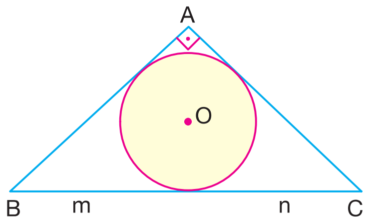
4.



ABC dik üçgen

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|a^2 - (b-c)^2|}{4} = \frac{|a^2 - (b+c)^2|}{4}$$

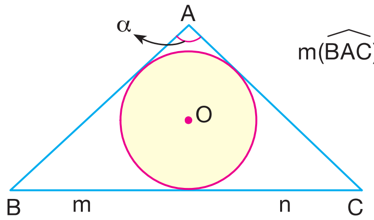
5.



ABC dik üçgeninin O merkezli iç teğet çemberinin hipotenüs üzerinde ayırdığı uzunluklar çarpımı üçgenin alanını verir.

$A(\widehat{ABC}) = m \cdot n$

✶



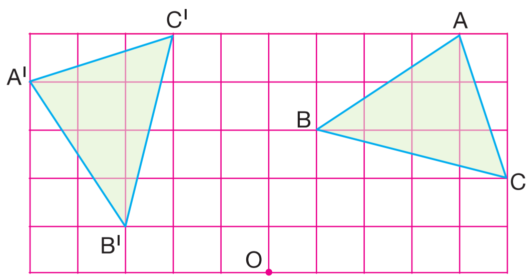
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$

$A(\widehat{ABC}) = m \cdot n \cdot \cot\frac{\alpha}{2}$

EŞLİK

Düzlemde öteleme, dönme, yansıma ya da bunların birkaçının bir arada kullanılması ile yapılan dönüşümlere izometri dönüşümleri denir.

Bu dönüşümler sonucunda oluşan bir şekle bu şeklin simetriği (eşi) denir.



Yukarıdaki ABC üçgeninin orijin etrafında 90° döndürülmesi ile oluşan A'B'C' üçgenleri eş üçgenlerdir.

ÜÇGENDE BENZERLİK

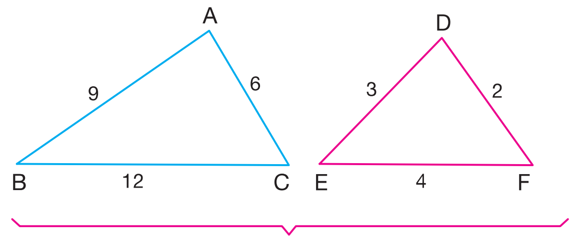
Yukarıda birbirine benzeyen nesneleri kavramaya çalışalım.

İki üçgenden biri belli bir oranda küçültüldüğünde ya da büyültüldüğünde diğeri elde ediliyorsa bu üçgenlere benzer üçgenler denir.

- ➢ Bir üçgenin belli bir oranda büyültülmüşü ya da küçültülmüşü bu üçgenin benzeridir.
- ➢ Bir üçgeni belli bir oranda büyüttüğümüzde ya da küçülttüğümüzde kenar oranları belli bir oranda artar ya da azalır, ancak açılar değişmez.

Benzerlik Oranı

Benzer iki üçgende karşılıklı kenar uzunluklarının oranına **benzerlik oranı** denir.



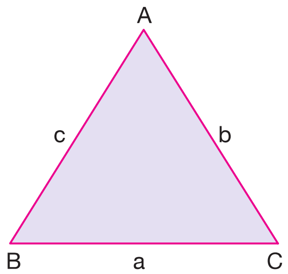
$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = 3$ (benzerlik oranı)

Benzer İki Üçgende;

- Karşılıklı kenarortayların uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı açıortayların uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı yüksekliklerin uzunlunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı çevrelerin uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı iç teğet çemberlerinin yarıçapları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı dış teğet çemberlerin yarıçapları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı çevrel çemberlerinin yarıçapları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı alanlar oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

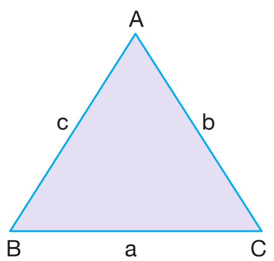
Üçgende Açılar ve Üçgenin Kenarları Arasındaki İlişkiler

- Bir ABC üçgeninde,



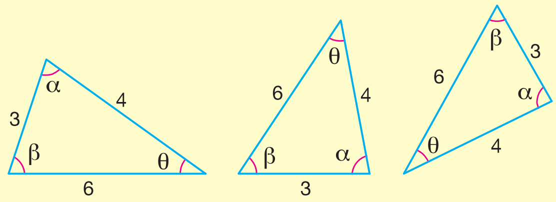
$$a > b > c \Rightarrow m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$$

- Bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür.

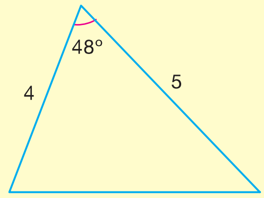


$$\left.\begin{array}{l} |b-c| < a < b+c \\ |a-c| < b < a+c \\ |a-b| < c < a+b \end{array}\right\} \text{üçgen eşitsizliği}$$

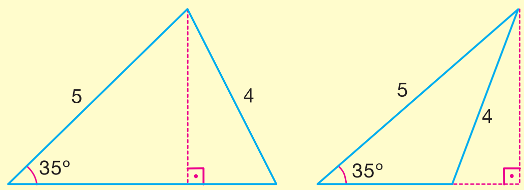
- Üç kenar uzunluğu belli olan yalnız bir üçgen vardır.



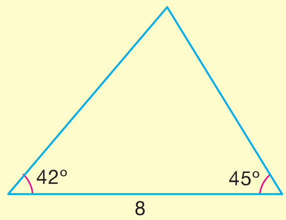
- İki kenar uzunluğu ve arasındaki açısı bilinen yalnız bir üçgen vardır.



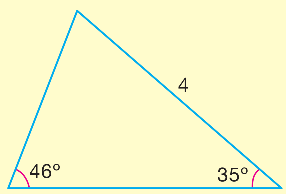
- İki kenarı ve bu kenarlar arasında olmayan açısı verilen birden fazla üçgen vardır.



- Bir kenarı ve bu kenara ait iki açısı verilen yalnız bir üçgen vardır.

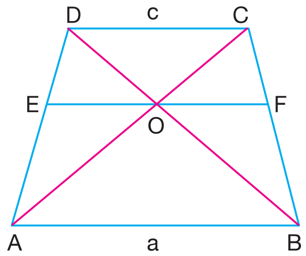


- İki açısı ve bunlardan birinin karşısındaki kenarı verilen yalnız bir üçgen vardır.



ÖZEL DÖRTGENLER

1. Bir yamukta paralel olan kenar uzunlukları a ve c olmak üzere, köşegenlerin kesim noktasından tabanlara paralel olarak çizilen doğru parçasının uzunluğu $\dfrac{2ac}{a+c}$ ile bulunur.



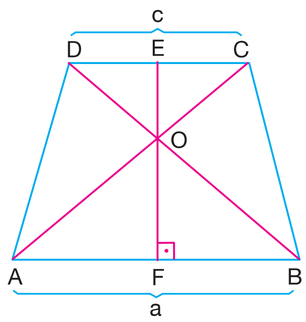
ABCD yamuk

EF // AB ise

$|EO| = |OF|$ ve

$|EF| = \dfrac{2ac}{a+c}$ dir.

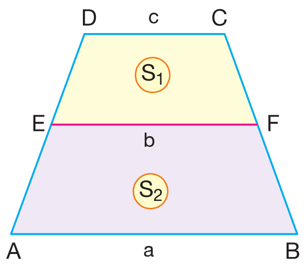
2. Bir ABCD yamuğunda paralel olan kenar uzunlukları a, c ve $|EF| = h$ ise



$|OE| = \dfrac{c \cdot h}{a+c}$

$|OF| = \dfrac{a \cdot h}{a+c}$

3.



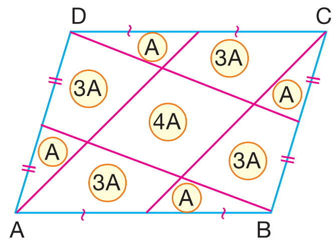
AB // EF // DC ise

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

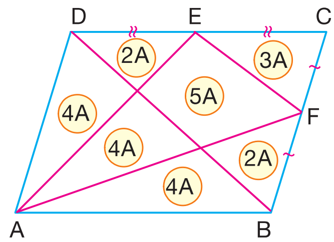
$S_1 = S_2$ ise $b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2}$ olur ki

Buna da "a ile c nin karesel ortalaması b dir" denir.

4.

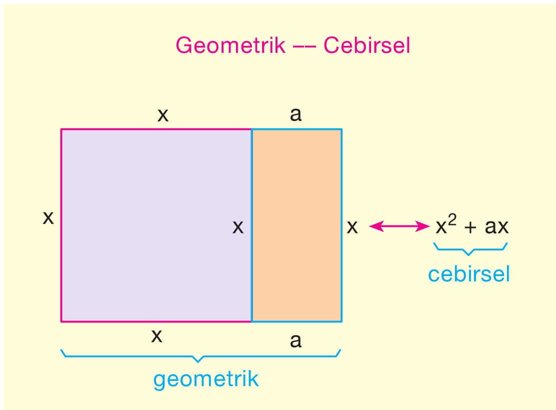


5.

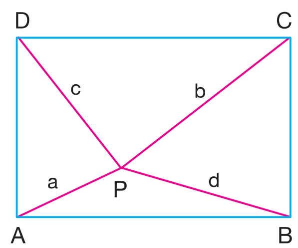


(444 3 252)

6.



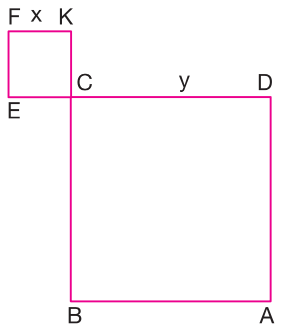
7.



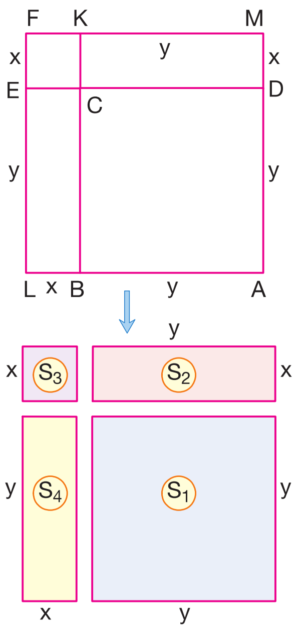
P noktası nerede olursa olsun $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ dir.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ özdeşliğini kanıtlayalım.

Kenar uzunlukları x birim ve y birim olan iki tane kare çizelim.



Şimdi aşağıdaki gibi şekli bir kenar uzunluğu (x + y) birim olan kareye tamamlayalım.



ABCD karesinin alanı $S_1 = y^2$

BLEC ve DCKM dikdörtgenlerinin alanları,
$S_2 = S_4 = x \cdot y$,

CEFK karesinin alanı $S_3 = x^2$,

Tüm şeklin alanı $(x + y)^2$ olup

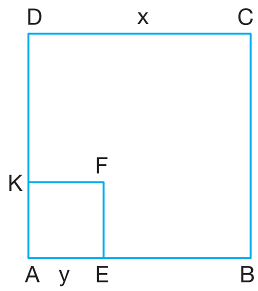
Bir bütünün alanı kendini oluşturan parçaların alanları toplamına eşit olacağından,

$A(AFLM) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ olup

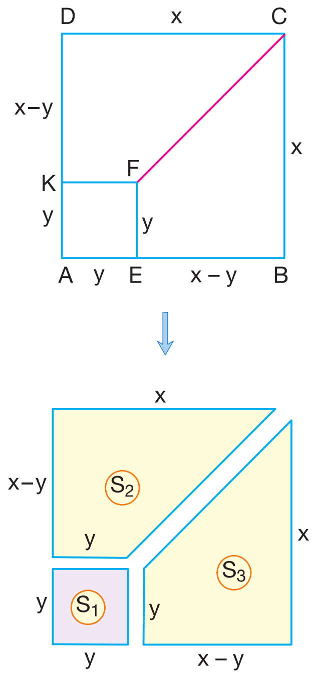
$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ özdeşliği ispatlanmış olur.

$x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ özdeşliğini kanıtlayalım.

$x > y$ olmak üzere kenar uzunlukları x birim ve y birim olan iki tane kare çizelim.



[FC] çizilirse büyük karenin alanı 3 parçaya ayrılır.



AEFK karesinin alanı $S_1 = y^2$

EBCF ve DCFK yamuklarının alanları,

$S_2 = S_3 = \left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot (x - y)$ yazılabilir.

Böylece, $A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3$ olduğundan,

$x^2 = y^2 + 2 \cdot \left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot (x - y)$

$x^2 = y^2 + (x + y) \cdot (x - y)$ denklemi düzenlenirse,

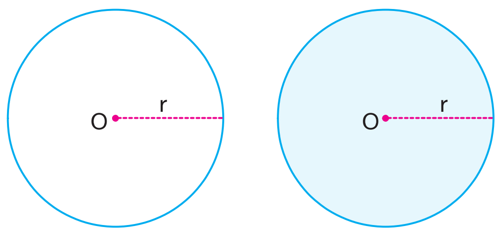
$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$ özdeşliği ispatlanmış olur.

ÇEMBER VE DAİRE

Çemberin Çevre Uzunluğu ve Dairenin Alan Bağıntıları

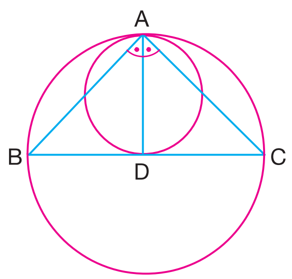
Bütün çemberlerde $\dfrac{\text{çevre}}{\text{çap}}$ oranı sabit bir sayı olup bu sayı yaklaşık olarak 3,14 . . . olup π (pi) ile gösterilmiştir.

- π sayısı hiçbir zaman iki tam sayının bölümü olarak yazılamayan yani irrasyonel (rasyonel olmayan, aşkın) bir sayıdır.



$\dfrac{\text{çevre}}{\text{çap}} = \dfrac{Ç}{2r} = \pi$ ise   Alan $= \pi . r^2$

Pratik Bilgi

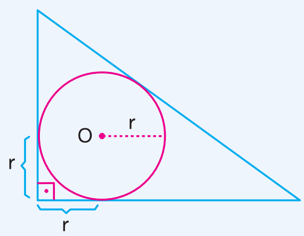


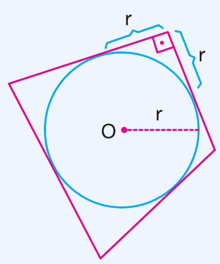
ABC üçgen

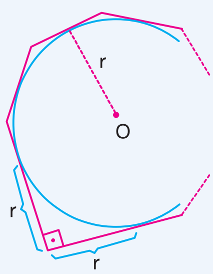
A ve D teğet noktaları ise

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$ dır.

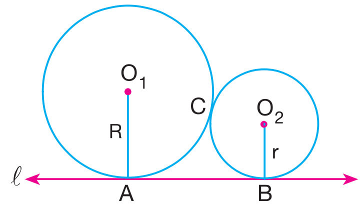
Bir çember dik açısı olan bir çokgene içten teğet ise dik olan köşeden çizilen teğet parçalarının uzunlukları yarıçap uzunluğuna eşittir.







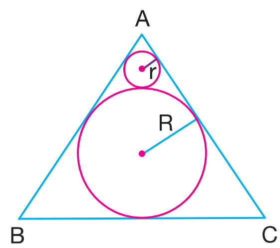
Pratik Bilgi



O_1 ve O_2 merkezli çemberler birbirine C noktasında, ℓ doğrusuna A ve B noktalarında teğet ise,

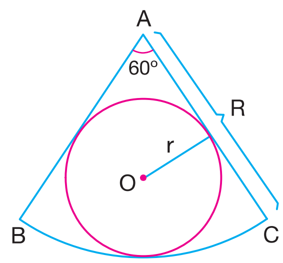
$|AB| = 2\sqrt{R.r}$ dir.

Pratik Bilgi



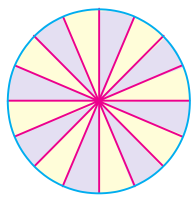
ABC eşkenar üçgen

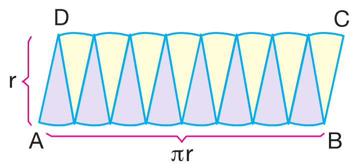
R = 3r



R = 3r

- Dairenin alanına aşağıdaki gibi ulaşabiliriz.





ABCD paralelkenarının alanı,

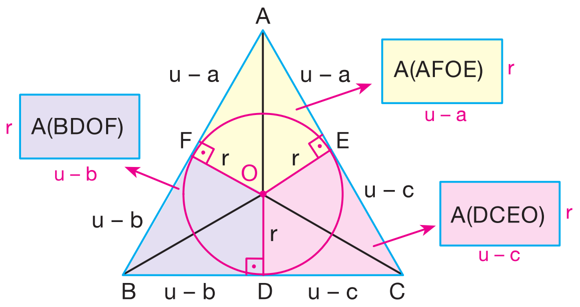
$A(ABCD) = \pi . r . r = \pi r^2$

Teorem :

Kenar uzunlukları a birim, b birim, c birim ve iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğu r birim olan bir üçgenin alanının u . r olduğunu gösterelim.

İspat :

ABC üçgeninin iç teğet çemberini çizelim.



$A(\overset{\triangle}{ABC}) = 2 \cdot A(\overset{\triangle}{AOE}) + 2 \cdot A(\overset{\triangle}{BOF}) + 2 \cdot A(\overset{\triangle}{EOC})$ olup

$2 \cdot A(\overset{\triangle}{AOE}) =$ r, u – a

$2 \cdot A(\overset{\triangle}{BOF}) =$ r, u – b

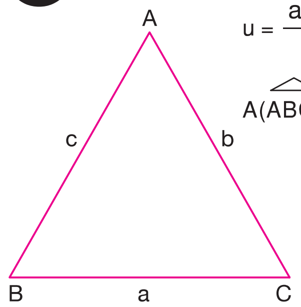
$2 \cdot A(\overset{\triangle}{EOC}) =$ r, u – c

+

$A(\overset{\triangle}{ABC}) =$ r $\underbrace{(u-a)\quad(u-b)\quad(u-c)}_{u}$ = u . r

$A(\overset{\triangle}{ABC}) =$ u . r elde edilir.

Teorem :

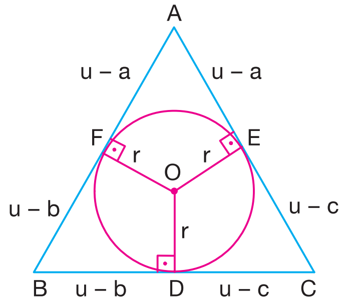


$u = \dfrac{a+b+c}{2}$ olmak üzere,

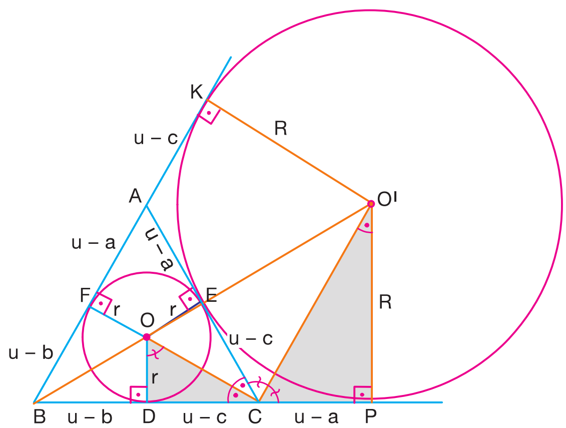
$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sqrt{u(u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$

İspat :

ABC üçgeninin O merkezli iç teğet çemberini çizelim.



Şimdi de AC kenarına ait dış teğet çemberini çizelim.



$\overset{\triangle}{KBO'}$ nde [OF] // [O'K] olup

Tales teoreminden, $\dfrac{r}{R} = \dfrac{u-b}{u}$ ... (1)

DOC ve PCO' benzer üçgenlerinden,

$\dfrac{r}{u-a} = \dfrac{u-c}{R}$ ... (2)

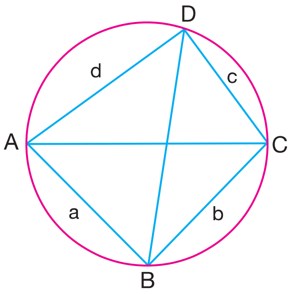
(1). ve (2). denklemlerden

$r = \sqrt{\dfrac{(u-a)(u-b)(u-c)}{u}}$ eşitliği ile,

$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sqrt{u(u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$ bulunur.

BATLAMYUS (PTOLEMY) TEOREMİ

Bir kirişler dörtgeninde köşegen uzunluklarının çarpımı, dörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının çarpımının toplamına eşittir.



ABCD kirişler dörtgeni
[AC] köşegen
[BD] köşegen
$|AC| = e$
$|BD| = f$
ise

e . f = a . c + b . d yazılabilir.

İspat :

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ADC}) = \beta$ olsun.

$\alpha + \beta = 180°$ olduğundan $\cos\alpha = -\cos\beta$ olup

$\cos\alpha + \cos\beta = 0$ yazılabilir.

O halde, ABC ve ADC üçgenlerinde cos teoremi ile

$$\frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd} = 0 \text{ eşitliğinden,}$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd).(ad + bc)}{ab + cd} \text{ elde edilir.}$$

Aynı şekilde, $m(\widehat{BAD}) = \theta$ ve $m(\widehat{DCB}) = \gamma$ olsun.

$\theta + \gamma = 180°$ olduğundan $\cos\theta = -\cos\gamma$ olup

$\cos\theta + \cos\gamma = 0$ yazılabilir.

O halde, BAD ve BCD üçgenlerinde cos teoreminden,

$$\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} + \frac{c^2 + b^2 - f^2}{2bc} = 0 \text{ eşitliğinden,}$$

$$f^2 = \frac{(ab + cd).(ac + bd)}{ad + bc} \text{ elde edilir.}$$

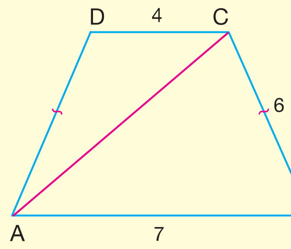
e^2 ve f^2 li denklemler taraf tarafa çarpılırsa,

$e^2 . f^2 = (ac + bd)^2$ olup

$e . f = ac + bd$ elde edilir.

"Sentetik ispatı da benzerlik kullanarak siz yapmaya çalışınız."

Batlamyus teoreminin bazı uygulamaları :



ABCD ikizkenar yamuk
$|AB| = 7$ birim
$|BC| = 6$ birim
$|DC| = 4$ birim

Buna göre, |AC| uzunluğunu bulalım.

ikizkenar yamuk bir kirişler dörtgeni olduğundan, Batlamyus teoremi uygulanabilir.

$|AC| = |BD| = e$ diyelim.

O halde,

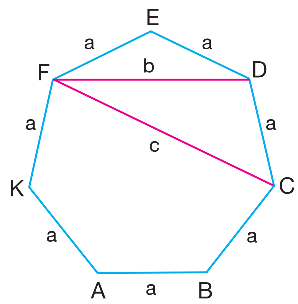
$e . e = 6 . 6 + 7 . 4$

$e^2 = 36 + 28$

$e = \sqrt{64} = 8$ birim bulunur.

Bir düzgün yedigende bir kenar uzunluğu a, en kısa köşegen uzunluğu b, en uzun köşegen uzunluğu c olsun.

Buna göre, a, b, c arasındaki ilişkiyi bulalım.



[FD] ve [FC] köşegenleri çizilirse

FCDE dörtgeni bir ikizkenar yamuk olur.

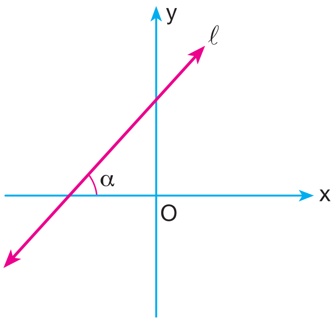
İkizkenar yamuk bir kirişler dörtgeni olduğundan,

Batlamyus teoremi ile,

$b^2 = a^2 + ac$ yazılabilir.

BİR DOĞRUNUN EĞİMİ

Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya eğim açısı ve bu açının tanjantına doğrunun eğimi denir ve eğim m ile gösterilir.



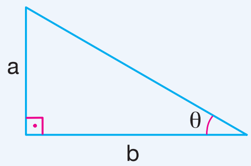
- ℓ doğrusunun eğim açısı α
- ℓ doğrusunun eğimi $m = \tan\alpha$ dır.

Not

$0 < \alpha < 90° \Rightarrow \tan\alpha > 0$

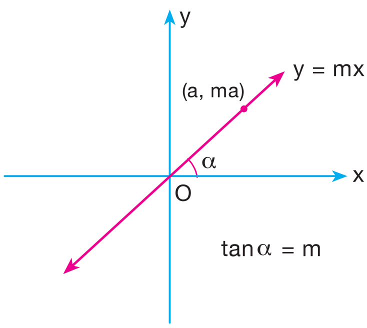
$90 < \alpha < 180° \Rightarrow \tan\alpha < 0$

$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \tan\alpha = -\tan\beta$

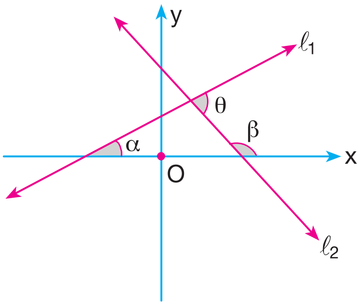


$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

y = mx doğrusu üzerindeki tüm noktaların ordinatları apsislerinin m katıdır.



İKİ DOĞRU ARASINDAKİ AÇI



ℓ_1 doğrusunun eğimi : $m_1 = \tan\alpha$

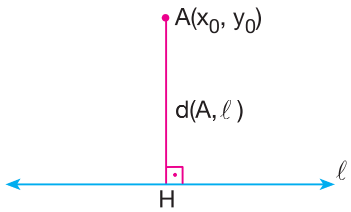
ℓ_2 doğrusunun eğimi : $m_2 = \tan\beta$

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}$$

BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA UZAKLIĞI

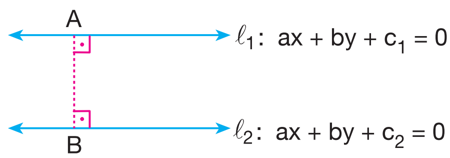
Dik koordinat sisteminde $A(x_0, y_0)$ noktasının

$\ell : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı,



$$|AH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ile hesaplanır.

PARALEL İKİ DOĞRU ARASINDAKİ UZAKLIK



$$|AH| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ile hesaplanır.

ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

Kapalı Denklemi ;

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olan ifade,

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemde,

$-2a = D$, $-2b = E$ ve $a^2 + b^2 - r^2 = F$ alınarak

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

denklemi elde edilir ve bu denkleme çemberin genel denklemi denir.

O halde,

Genel Denklemi :

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

olan çemberin merkezinin koordinatları,

$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve

yarıçap uzunluğu,

$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ ile bulunur.

Not

a) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Denkleminin çember belirtmesi için,

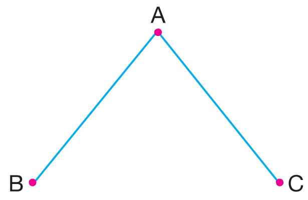
1. $A = C \neq 0$
2. $B = 0$
3. $D^2 + E^2 - 4F > 0$ olmalıdır.

b) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi

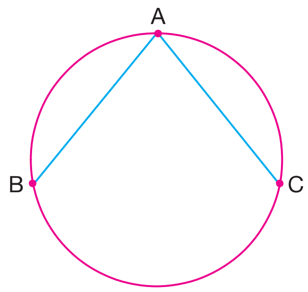
1. $D^2 + E^2 - 4F = 0$ ise nokta
2. $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ise boş küme belirtir.

Koordinat Düzleminde (doğrusal olmayan) Herhangi Üç Noktadan Geçen Çemberlerin Denklemi

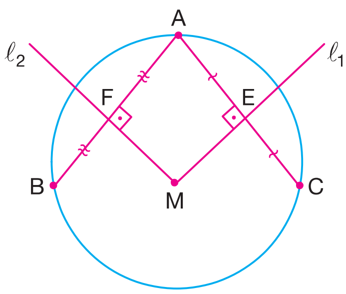
Verilen noktalar A, B, C olsun,



A, B, C noktalarından geçen çember için, [AB] ve [AC] birer kiriş olur.



Kirişlerin orta dikme doğruları merkezde kesiştiğinden,



$MF \perp AB$, $ME \perp AC$

eşitliklerinden elde edilen ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularının ara kesiti ile M noktası bulunur.

Böylece, merkezi M ve üzerindeki bir noktası, (A, B, C den biri) bilinen çember denklemi bulunmuş olur.

✓ A(a, b) noktasının p birim sağa, q birim yukarıya ötelenmesi ile elde edilen nokta $A^{I}(a + p, b + q)$ dur.

✓ A(a, b) noktasının p birim sağa, q birim aşağıya ötelenmesi ile elde edilen nokta $A^{I}(a + p, b - q)$ dur.

✓ A(a, b) noktasının p birim sola, q birim yukarıya ötelenmesi ile elde edilen nokta $A^{I}(a - p, b + q)$ dur.

✓ A(a, b) noktasının p birim sola, q birim aşağıya ötelenmesi ile elde edilen nokta $A^{I}(a - p, b - q)$ dur.

"Satranç tahtasında taşlarla yapılan hamleler birer öteleme hareketi midir acaba?"

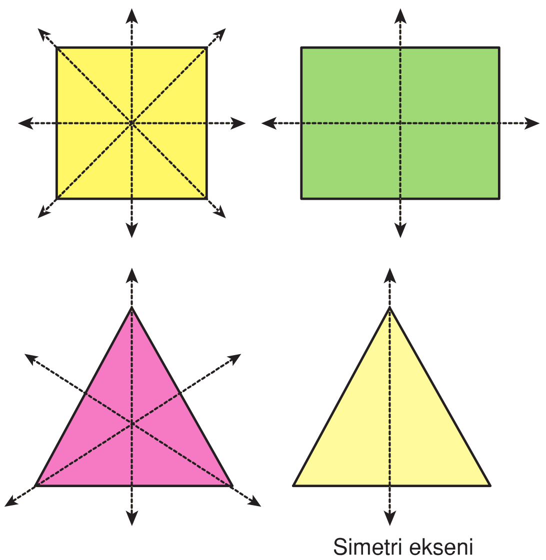
$ax + by + c = 0$ doğrusunun

p birim sağa, q birim aşağıya ötelenmesi elde edilen doğru

$a(x - p) + b(y + q) + c = 0$ dır.

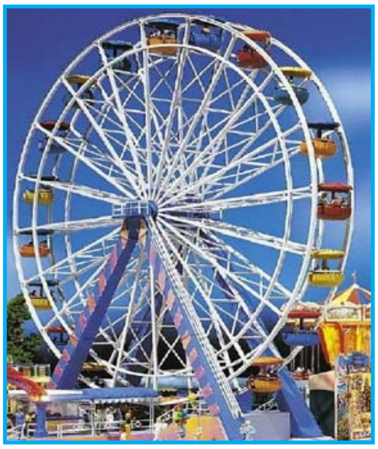
SİMETRİ EKSENİ

Herhangi bir şekli ortadan ikiye böldüğümüzde iki ayrı birbirinin aynısı şekil elde edebiliyorsak buna simetrik şekil denir. Bu simetrik şekli tam ortadan ikiye bölen bu çizgiye simetri ekseni denir. Simetri ekseninin böldüğü şeklin her iki yanı birbirine tamamen eşit olmalıdır.

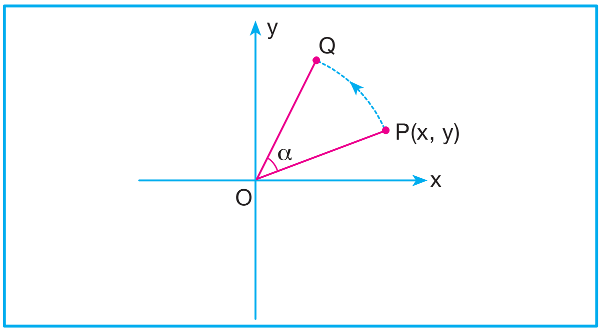


Yukarıda kare, dikdörtgen, eşkenar üçgen ve ikizkenar üçgenin simetri eksenleri gösterilmiştir.

DÖNME (Rotation)



Düzlemdeki bir P(x, y) noktasının orijin etrafında pozitif yönde $\alpha°$ kadar döndürülmesi ile elde edilen nokta Q olsun.



$Q = R_{(\alpha)}(P) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ \ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

şeklinde gösterilir.

- Burada R_α ya dönme dönüşümü denir.
- Düzlemde her P noktası belli bir açı ile dönebileceğinden, $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir dönüşümdür.

SONUÇ :

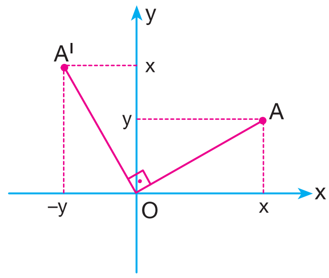
- Dönme orijin hariç her noktayı değiştirir.
- Değişmeyen noktaya dönme merkezi denir.

NOT :

90° ve 180° döndürülmelerinde şekil çizilerek de sonuca kolayca ulaşılabilir.

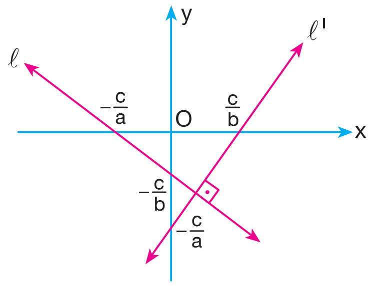
BAZI ÖZEL DÖNDÜRMELER

- A(x, y) noktasının orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen nokta A' (–y, x) noktasıdır.



- ℓ : ax + by + c = 0 doğrusunun orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen doğru;

  ℓ' : **–ay + bx – c = 0** doğrusudur.



- A(x, y) noktasının orijin etrafında 180° döndürülmesi ile elde edilen nokta,

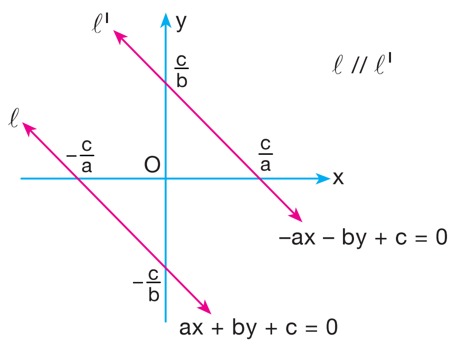
$R_{180°}(A) = (x.\cos180° - y.\sin180°,\ x.\sin180° + y.\cos180°)$

$\quad = (-x, -y)$

$R_{180°}(x, y) = (-x, -y)$ olur.

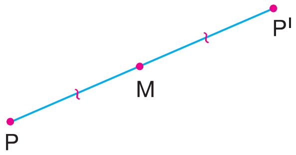
- ℓ : ax + by + c = 0 doğrusunun orijin etrafında 180° döndürülmesi ile elde edilen doğru,

  –ax – by + c = 0 doğrusudur.



YANSIMA (Reflection)

Düzlemde bir P noktasının, M noktasına göre simetriği olan nokta P' olsun.



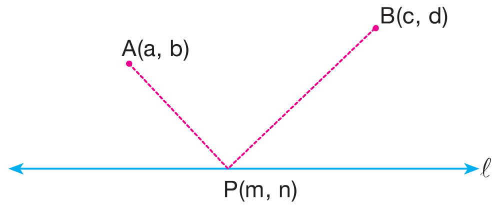
P' noktası P' = 2M – P bağıntısı ile bulunur.

Burada M yansıma merkezidir.

Bu dönüşüme de yansıma dönüşümü denir.

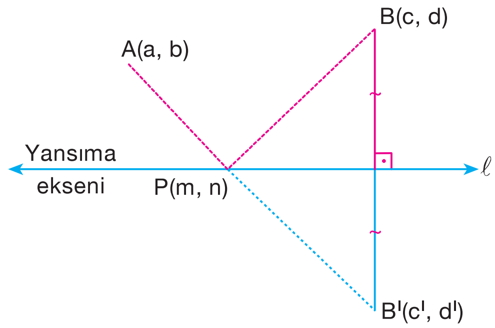
$P' = S_M(P) = 2M - P$ ile gösterilir.

Pratik Bilgi



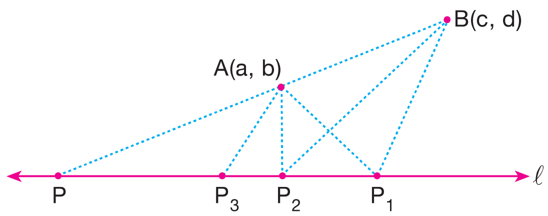
$|AP| + |PB|$ toplamının en küçük değerini bulmak için A ya da B den herhangi birinin ℓ doğrusuna göre simetriği alınıp kırık çizgi düz hale getirilir.

Yani,



Böylece A, P, B' noktaları doğrusal olur, eğimler eşitlenerek ya da benzer üçgenler kullanarak P noktasının koordinatları bulunmuş olur.

Pratik Bilgi

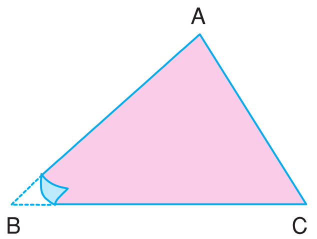


$||BP| - |AP||$ farkının en büyük olmasını sağlayan P noktası AB nin ℓ doğrusunu kestiği noktadır.

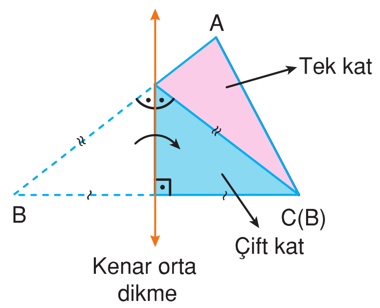
Böylece, üçgen eşitsizliğinden $||AP| - |PB||$ nin en büyük değeri $|AB|$ olur.

KATLAMA SORULARI

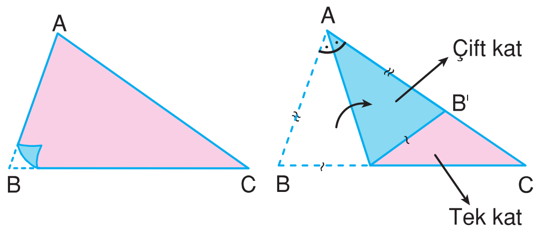
1. Bir üçgende bir köşe diğer köşeye gelecek şekilde katlandığında katlama çizgisi (kat izi) bir kenar orta dikme doğrusu üzerindedir.



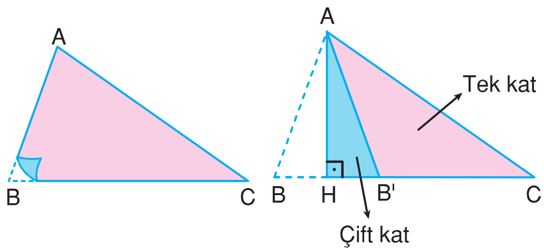
Yukarıdaki ABC üçgeninin B köşesini C köşesine getirecek şekilde katlama yapalım.



2. Aşağıdaki ABC üçgeninde B köşesi, [AC] kenarı üzeine gelecek şekilde katlandığında oluşan katlama çizgisi A köşesine ait açıortay doğrusu üzerindedir.

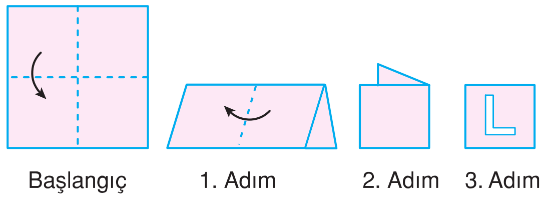


3. Aşağıdaki ABC üçgeninde B köşesi, [BC] kenarı üzerine gelecek şekilde katlandığında katlama çizgisi A köşesine ait yükseklik doğrusu üzerindedir.

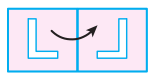


KESME SORULARI

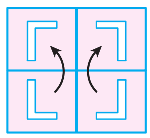
4. Kağıt katlayıp kesme sorularında tek yapmanız gereken kağıt katlandıktan sonra katlandığı yöne doğru simetriğini almaktır.
Örneğin, kare şeklindeki bir kağıt kesikli çizgilerle işaretlenmiş yerlerden oklar yönünde katlandıktan sonra kağıttan L şeklinde bir parça kesilerek çıkartılsın.



Şekilde görüldüğü gibi kağıt önce aşağı sonra sola doğru katlanmış. Geriye doğru tekrar açalım ve her defasında şekillerin simetriğini alalım.



Kağıdı sağa doğru açıp katlama çizgisine göre simetri alalım.



Kağıdı yukarı doğru açıp katlama çizgisine göre simetri alalım.

Son durumda konumu değiştirilmeden katlandığı yerlerden tamamen açılan bu kağıdın görünümü bulunmuş olur.

PUSULA

Deniz, orman gibi yerlerde ya da gece vakti vb. yön saptamak için kullanılır. Ortasında hareket edebilen bir ibresi vardır. Pusulayı düz bir yere koyduğumuzda ibrenin kırmızı ucu daima kuzeyi gösterir.

Örneğin, B noktasından C noktasına gidilirken pusulanın ibresi ile izlenilen yol arasındaki açının hem pusula hem de harita üzerinde gösterimi aşağıdaki gibidir.