

Ortaöğretim Alanı

Föy No.

MF - TM

01

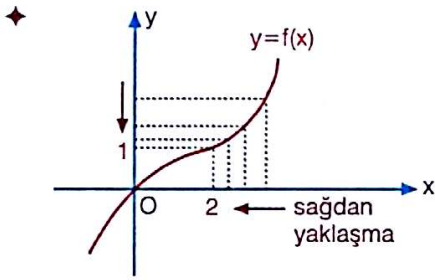
Bu kitapçığın her hakkı saklıdır. Tüm hakları eis Yayınları'na aittir. Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metin ve sorular, kitapçığı yayımlayan şirketin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

Adı Soyadı:

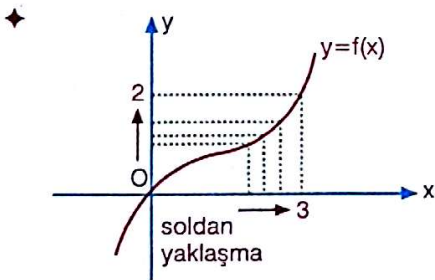
TÜREV - I

FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK

- ◆ Bir f fonksiyonunda, x değerleri a 'dan küçük fakat artan değerlerle $x=a$ 'ya yaklaştıkça y değerleri $y=b$ 'ye yaklaşıyorsa " $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasında soldan limiti b 'dir." denir ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ şeklinde gösterilir.
- ◆ Bir f fonksiyonunda, x değerleri a 'dan büyük fakat azalan değerlerle $x=a$ 'ya yaklaştıkça y değerleri $y=c$ 'ye yaklaşıyorsa " $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasında sağdan limiti c 'dir." denir ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$ şeklinde gösterilir.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$



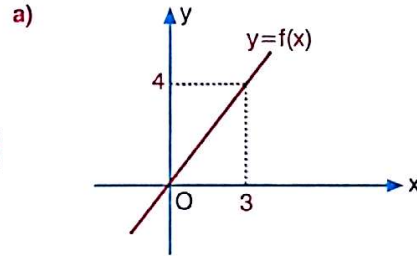
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

- ◆ $f(x)=x+2$ fonksiyonunda x değerleri 3'e sağdan ve soldan yaklaşıırken görüntüsünün hangi değere yaklaştığını inceleyelim.

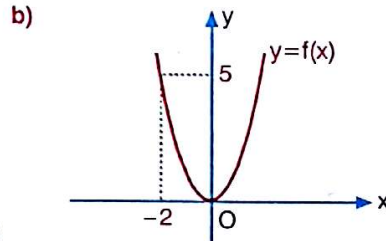
	soldan yaklaşma				sağdan yaklaşma		
x	2,9	2,95	2,99	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	4,9	4,95	4,99	5	5,001	5,01	5,1
	→				←		
	$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$				$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$		

Örnek 1

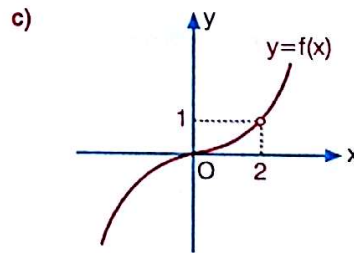
Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların istenen noktada sağdan ve soldan limitlerini bulunuz.



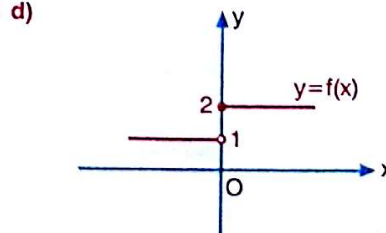
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$$



$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \dots\dots\dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$$

- ◆ Bir fonksiyonun $x=a$ apsisli noktasındaki sağdan ve soldan limitleri eşit ise fonksiyonun $x=a$ apsisli noktasında limiti vardır denir.

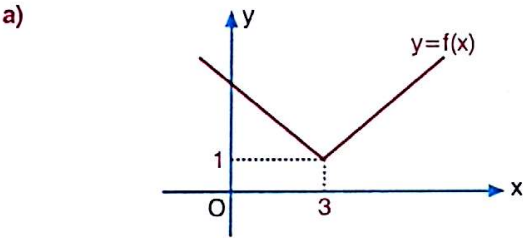
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = k \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$$

- ◆ Bir fonksiyonun $x=a$ apsisli noktasındaki sağdan ve soldan limitleri farklı ise fonksiyonun $x=a$ apsisli noktasında limiti yoktur denir.

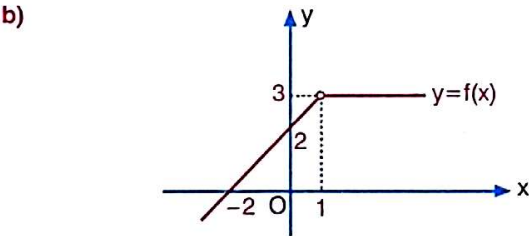
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ yoktur.}$$

Örnek 2

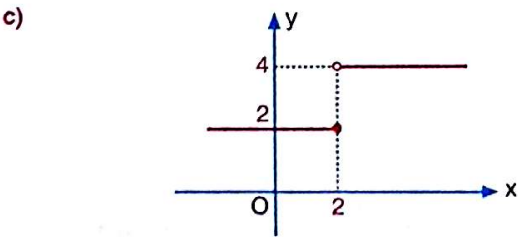
Aşağıda grafiği çizilen fonksiyonlara göre aşağıdaki limitlerin (varsa) değerlerini bulunuz.



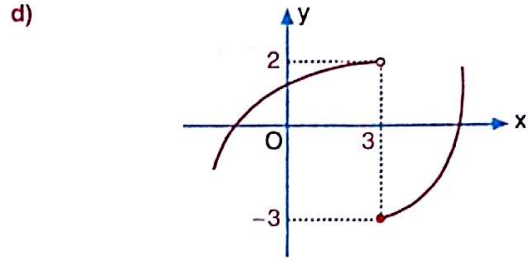
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots$



- ◆ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots\dots\dots$



- ◆ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$



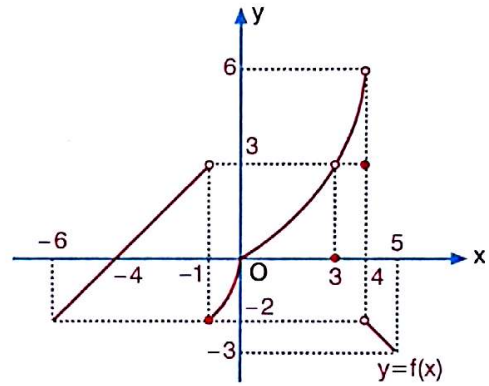
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- ◆ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots$

eis

.....

Örnek 3

Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



- a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots$

- c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots$
- d) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \dots\dots\dots$

- e) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- f) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \dots\dots\dots$

- g) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- h) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \dots\dots\dots$

eis

LİMİTİN ÖZELLİKLERİ

Sabit fonksiyonların limiti kendisine eşittir.

$$c \in \mathcal{R} \text{ için } \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

polinom fonksiyonların limiti fonksiyonun görüntüsüne eşittir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

♦ f ve g, $x=a$ noktasında limitleri gerçekteki sayı olan iki fonksiyon olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \mp \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \begin{cases} g(x) \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad (c \in \mathcal{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n, \quad (n \in \mathcal{Z}^+)$$

Örnek 4

Aşağıdaki limitlerin sonucunu bulunuz.

a) $\lim_{x \rightarrow 5} 10 = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{x \rightarrow (-1)} (x^2 - 3x + 4) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} [2x - \log_5(3x - 1)] = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} (|x - 3| + |x + 5|) = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{2x + 1} - 7) = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{3x-1} = \dots\dots\dots$

Örnek 5

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + 1) + \lim_{x \rightarrow 2^-} |1 - x|$$

ifadesinin değeri kaçtır?

Örnek 6

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} [3 \cdot f(x) - 2 \cdot g(x)]$ ifadesinin değeri kaçtır?

Örnek 7

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot g(x)}{2 \cdot g(x) + f(x)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2f(x) + 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -3$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x-5) - x}{g(1-x) + 2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Örnek 9

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$

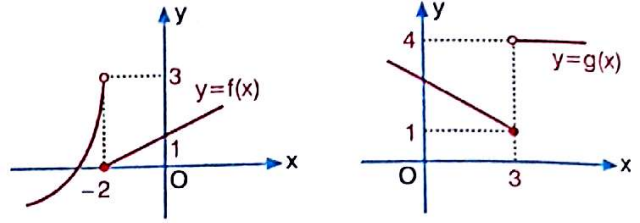
olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(2x-1) + f(5-x)}{f(x^2-1)}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) 3 E) 4

(2012/LYS)

Örnek 10

Aşağıda $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir.

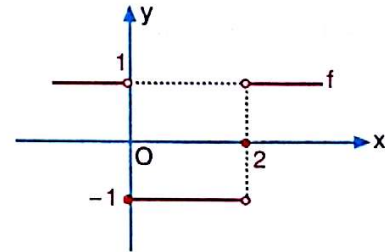


eis

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (g \circ f)(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

Örnek 11

$f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



f fonksiyonu yardımıyla g fonksiyonu, her $x_0 \in \mathcal{R}$ için

$$g(x_0) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $(g \circ f)(2)$ değeri kaçtır?

eis

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

(2014/LYS)



1. $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 4x + 2)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

5. $\lim_{x \rightarrow (-4)} \frac{|x-5|}{\sqrt[3]{x+3}}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -10 B) -9 C) -3 D) 3 E) 9

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) 3

6. $\lim_{x \rightarrow 2} [\log_3(x^2 + x + 3)]$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) 0 C) 4 D) 8 E) 12

7. $\lim_{x \rightarrow 3} [4 \cdot f(x) - 1] = 15$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

8. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -1$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 4} [3 \cdot f(x) - 2 \cdot g(x)]$ ifadesinin değeri kaçtır?

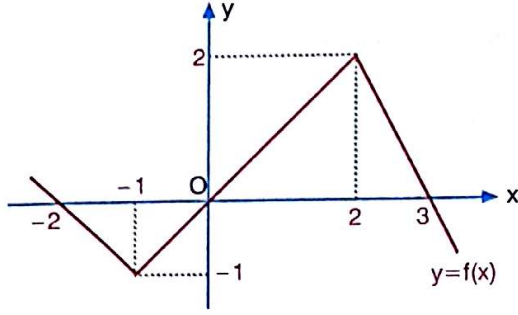
- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

eİs

eİs

eİs

9. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 2 D) 1 E) -2

10. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -3$
 $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 2$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{2 \cdot f(x) - g(x)}{1 + f(x)} \right]$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

11. $\lim_{x \rightarrow (-3)} (x + |x - 3| + x \cdot |1 - x|)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -15 B) -11 C) -9 D) 9 E) 15

12. $\lim_{x \rightarrow (-2)} (\sqrt[3]{x^2 + x - 3})$

ifadesinin değeri kaçtır?

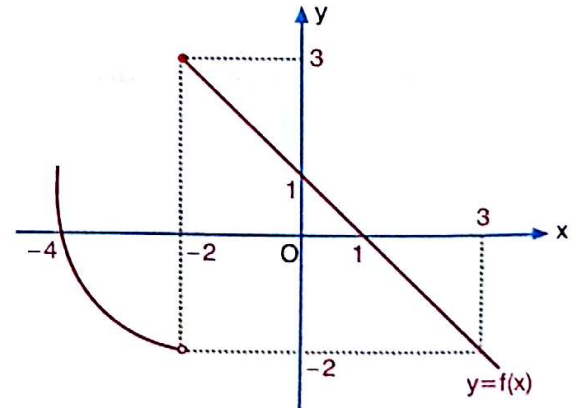
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x \cdot \cos x)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

14. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ C) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$
D) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 3$ E) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = 3$



1. a pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 2x - 15) = 0$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

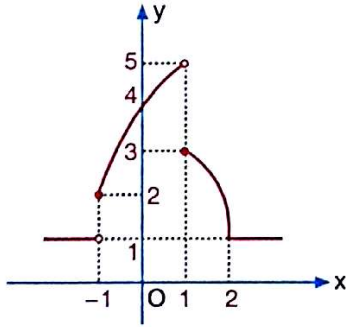
- 2.

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{2a^2 + b^2}{a + 2b}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -a B) -b C) b D) 2a E) 3b

3. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



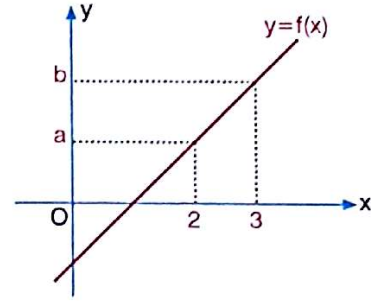
Buna göre,

- I. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
 II. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$
 III. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$
 IV. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 2$
 V. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$

Ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

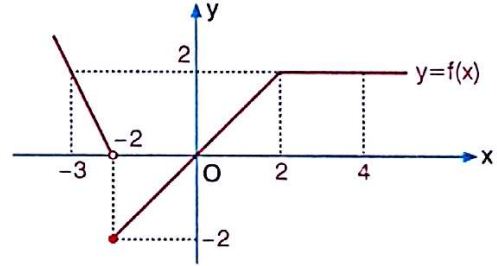
4. Aşağıda $y=2x-3$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

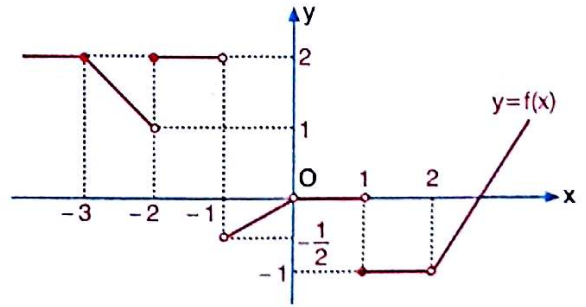
5. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = 0$ B) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -1$ C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$
 D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ E) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

6. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

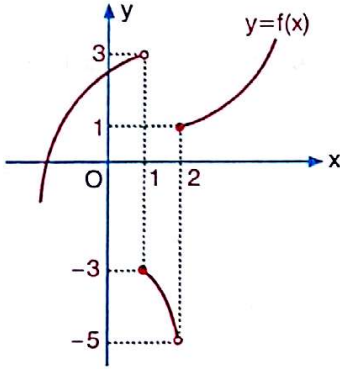
- A) -2 B) -1 C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

7. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) + x}{3 - g(3-x)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

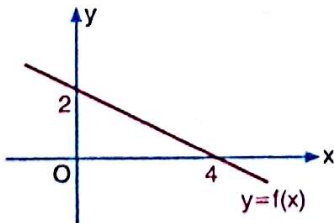
8. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x+1)}{f(2-x)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) 3

9. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

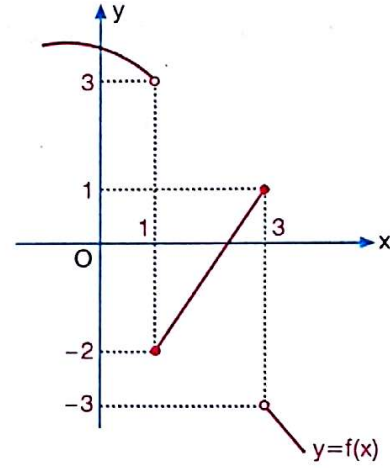
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x-1) + x}{f(8-2x) - x + 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{7}{3}$ B) -2 C) $\frac{1}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

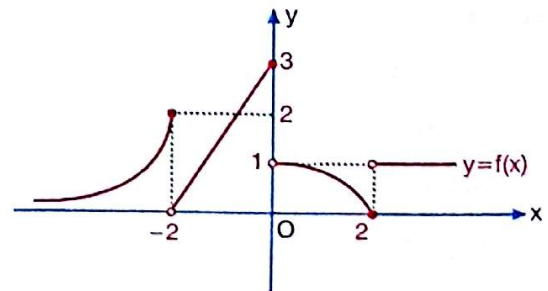
11. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 1 E) 3

12. Aşağıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 3^+} (f \circ f)(1-x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3