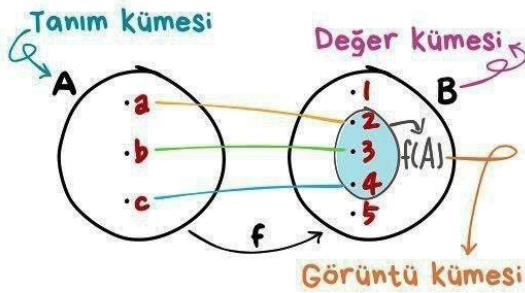


Diğer tüm PDF dosyaları ücretsiz üyeliksiz [bu linkte](#)

FONKSİYONLAR

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için A kümesinin her bir elemanını B kümesinin **bir ve yalnız bir** elemanına eşleyen bağıntıya A dan B ye **fonksiyon** denir.

$f: A \rightarrow B$ biçiminde tanımlanır.

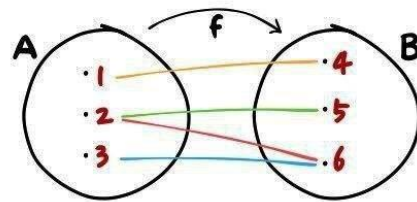


NOT

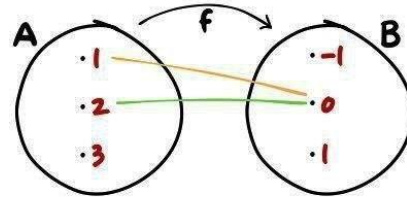
A dan B ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için

- Tanım kümesinde açıkta eleman kalmamalıdır.
- Tanım kümesindeki her elemanın yalnız bir tane görüntüsü olmalıdır.

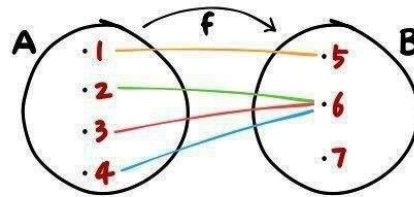
Örnek



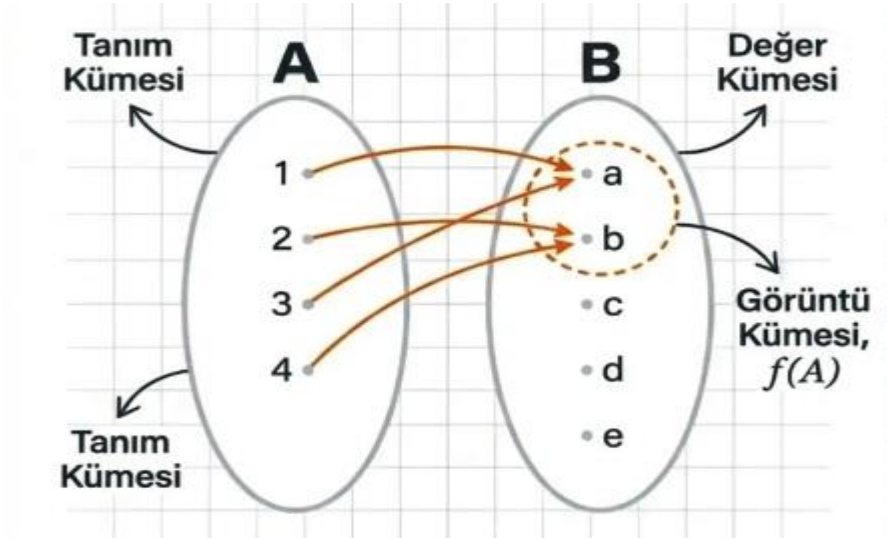
Tanım kümesindeki her elemanın bir görüntüsü olmadığından **fonksiyon değildir**.



Tanım kümesinde açıkta eleman kaldığından **fonksiyon değildir**.



Fonksiyon olma şartlarını sağladığından **fonksiyondur**.



ÖRNEK:

Çocuklar kümesinden babalar kümesine tanımlanan ve her çocuğu babasıyla eşleştiren bağıntı fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM: Bu bağıntının fonksiyon olması için her çocuğun en fazla ve en az bir tane babası olmalıdır. Gerçekte her çocuğun mutlaka bir babası mevcuttur ve bir çocuğun iki babasının olması biyolojik olarak mümkün değildir. Bu bağıntı fonksiyondur.

UNUTMAYIN: Birkaç çocuğun aynı babaya sahip olması fonksiyon olmayı bozmaz.

Matematikkafe.com

ÖRNEK: $f : A = \{1, 2, 3\} \rightarrow B$

$$f(x) = 2x + 3$$

fonksiyonunun sıralı ikililerini yazalım: Burada tanım kümesinin elemanları verilmiş fakat görüntüler verilmemiştir. Fonksiyonun kuralında x yerine orijinalleri yerleştirerek görüntüleri bulacağız.

$$1 \text{ in görüntüsü } f(1) = 2.1 + 3 = 5$$

$$2 \text{ nin görüntüsü } f(2) = 2.2 + 3 = 7$$

$$3 \text{ ün görüntüsü } f(3) = 2.3 + 3 = 9$$

$f = \{ (1,5), (2,7), (1,c), (3,9) \}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK:

$f = \{ (-4,3), (0,2), (1,5), (2,-1), (-3,9), (3,2), (-2,-1) \}$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki soruları çözelim:

1. Tanım kümesi nedir?
2. Görüntü kümesi nedir?
3. $f(2) = ?$
4. $f(-3) = ?$
5. $f(5) = ?$

ÇÖZÜMLER:

1. Sıralı ikililerin birinci bileşenleri tanım kümesinin elemanlarını verir.

$$A = \{ -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3 \}$$

2. Sıralı ikililerin ikinci bileşenleri görüntü kümesinin elemanlarını verir.

$$B = \{ -1, 2, 3, 5, 9 \}$$

3. $f(2) = ?$ sorusu "2" nin görüntüsü kaç demektir"

2' nin görüntüsü sıralı ikilide 2 nin karşısındaki sayıdır.
 $f(2) = -1$

4. $f(-3) = ?$ sorusu "-3" ün görüntüsü kaç demektir"

-3'ün görüntüsü sıralı ikilide -3 ün karşısındaki sayıdır.
 $f(-3) = 9$

5. $f(5) = ?$ sorusu "5" in görüntüsü kaç demektir"

5'in görüntüsü sıralı ikilide 5 in karşısındaki sayıdır. Sıralı ikililerin hiç birinde 5 birinci bileşen olarak yer almamıştır. Yani bu fonksiyon 5 için tanımlanmamıştır. 5 in görüntüsü yoktur. Matematikkafe.com

Bir sonraki sayfaya geçiniz...

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

➤ BİRİM FONKSİYON

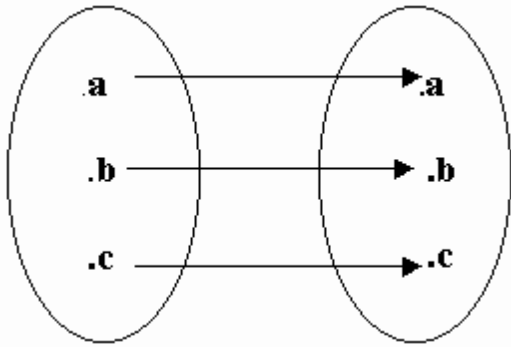
$f : A \rightarrow B$
 $f(x) = x$ ise

f fonksiyonuna birim fonksiyon denir. Her elemanın görüntüsü kendisine eşittir. Birim fonksiyon genellikle $I(x)$ ile gösterilir.

ÖRNEK:

Aşağıda $A = \{ a, b, c \}$ kümesinde şema ile tanımlanan

$I : A \rightarrow A$ fonksiyonu birim fonksiyondur çünkü: $I(x) = x$ olur.
 $I(a) = a$, $I(b) = b$, $I(c) = c$ dir.



Matematikkafe.com

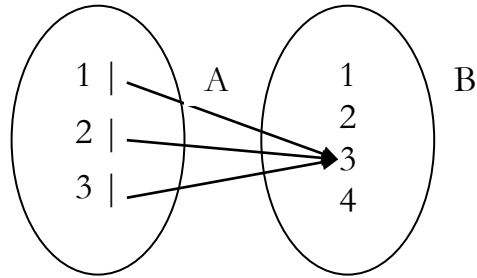
➤ SABİT FONKSİYON

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda bütün orijinaller aynı görüntüye sahip ise f ye sabit fonksiyon denir ve her $x \in A$ için $f(x) = b$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK:

Bu fonksiyonu $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$f : A \rightarrow B$ A'nın tüm elemanları tek elemana gönderildiği için, fonksiyon sabit fonksiyondur.

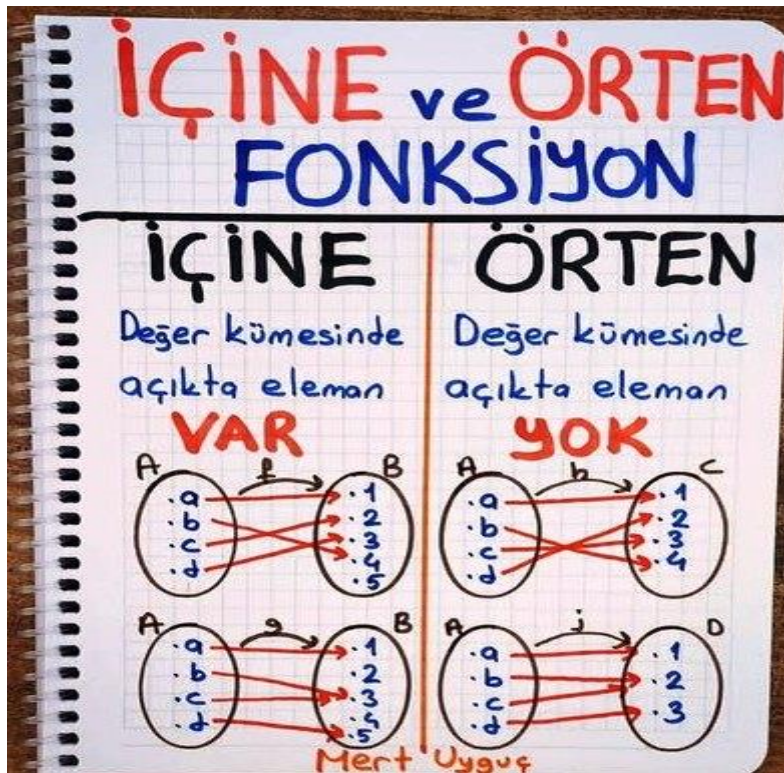


ÖRNEK: Her işçisine aynı ücreti veren bir patronun işçileri ile aldıkları ücretleri eşleştiren fonksiyon sabit fonksiyondur.

➤ BİRE BİR FONKSİYON

➤ İÇİNE VE ÖRTEN FONKSİYON

- Bir fonksiyon ya içinedir ya da örtendir. Hem içine hem örtene olamaz.



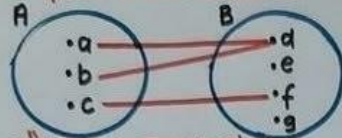
Matematikkafe.com

Bir sonraki sayfaya geçiniz...

ÖZET

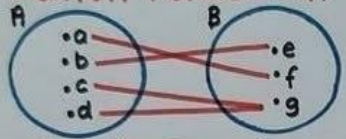
FONKSİYON TÜRLERİ

* İÇİNE FONKSİYON:



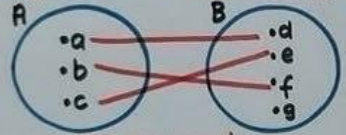
Değer kümesinde açıktan eleman var!

* ÖRTEN FONKSİYON:



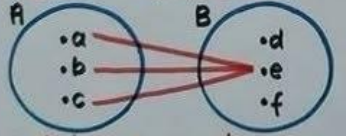
Değer kümesinde açıktan eleman kalmamalı!

* BİREBİR FONKSİYON:



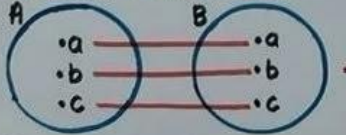
Farklı elemanlar farklı elemanlarla eşleşecek!

* SABİT FONKSİYON:



A'nın elemanları, B'de sadece bir elemanla eşlenmelidir!

* BİRİM FONKSİYON



Her eleman kendine gidecek!

Bir sonraki sayfaya geçiniz...

FONKSİYONLARLA YAPILAN İŞLEMLER

➤ TERS FONKSİYON:

$f: A \rightarrow B$ ye, $f: x \rightarrow y = f(x)$ fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olsun. $B \rightarrow A$ ya ve $y \rightarrow x$ fonksiyonuna f in tersi denir ve f^{-1} şeklinde gösterilir.

$$f: A \rightarrow B \Rightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$$

ÖRNEKLER:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}x + 5$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

$$f(x) = \frac{3}{4}x + 5$$

$$x = \frac{3}{4}y + 5$$

$$4x = 3y + 20$$

$$y = \frac{4x - 20}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x - 20}{3}$$

2. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ye $f(x) = x^2 + 2$ fonksiyonunun tersini bulunuz ($x > 0$)

Çözüm:

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$x = y^2 + 2$$

$$y^2 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt{x - 2} = f^{-1}(x)$$

Matematikkafe.com

➤ BİLEŞKE FONKSİYON:

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ birer fonksiyon ise A 'daki her elemanı f ve g fonksiyonları ile C 'nin elemanlarına dönüştüren fonksiyon f ile g 'nin bileşkesi denir.

ÖZELLİKLERİ:

- $f \circ g \neq g \circ f$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ (I birim fonksiyon)
- $f \circ I = I \circ f = f$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- $(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
- $f \circ g = h \Rightarrow f = h \circ g^{-1}$ ve $g = f^{-1} \circ h$

ÖRNEKLER:

1. $R \rightarrow R'$ ye iki fonksiyon, $f(x) = 2x - 1$ ve $g(x) = x + 1$ ise $(g \circ f)(-1)$ nedir?

Çözüm:

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(2 \cdot (-1) - 1) = g(-3) = -3 + 1 = -2$$

2. f ve $g : R \rightarrow R'$ ye

$$f(x) = 3x + 2 \text{ ve } g(x) = \frac{x-1}{3} \text{ ise, } (f \circ g)(x) \text{ ve } (g \circ f)(x)$$

fonksiyonlarını bulun.

Çözüm:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{x-1}{3} + 2 = x - 1 + 2 = x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2)$$

$$= \frac{(3x+2)-1}{3} = \frac{3x+1}{3}$$

3. f ve $g : R \rightarrow R'$ ye

$f(x) = 2x + 1$ ve $(g \circ f)(x) = 3x + 2$ ise, $g(x)$ nedir?

Çözüm:

$$\underbrace{(g \circ f)}_I \circ f^{-1}(x) = (3x + 2) \circ f^{-1}$$

$$g(x) = (3x + 2) \circ f^{-1}$$

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \text{ dir.}$$

O halde.

$$g(x) = (3x + 2) \circ \left(\frac{x-1}{2} \right)$$

$$g(x) = 3 \cdot \frac{x-1}{2} + 2$$

$$g(x) = \frac{3x+1}{2}$$

4. f ve $g : R \rightarrow R'$ ye $f(x) = \frac{x-1}{3}$ ve $(f \circ g)(x) = 6x + 1$ ise $g(x) = ?$

Çözüm:

$$\underbrace{(f^{-1} \circ f \circ g)}_I(x) = f^{-1} \circ (6x + 1)$$

$$g(x) = f^{-1} \circ (6x + 1)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{-1} = 3x+1$$

$$g(x) = (3x + 1) \circ (6x + 1)$$

$$g(x) = 3 \cdot (6x + 1) + 1 = 18x + 4$$

5. f ve $g : R \rightarrow R'$ ye

$(g \circ f^{-1})(x) = \frac{2x+1}{3}$ ve $g^{-1}(x) = 3x - 1$ ise $f(x)$ nedir?

Çözüm: $(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1} \circ \left(\frac{2x+1}{3} \right)$

$$f^{-1}(x) = (3x-1) \circ \left(\frac{2x+1}{3} \right)$$

$$f^{-1}(x) = 3 \cdot \frac{2x+1}{3} - 1$$

$$f^{-1}(x) = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} \text{ dir.}$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1- f A dan B ye bir fonksiyon ise, $x \cdot x^2$ fonksiyonu bire bir midir?

Cevap:

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$f(2) = 2^2 = 4$ olduğundan, $-f(-2) = f(2)$ olur yani verilen fonksiyon bire bir değildir.

2- $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{0, 1\}$ kümeleri için f A dan B ye bir fonksiyon ise $f(x) = x^2$ fonksiyonunun örten olmadığını araştırınız.

Cevap:

$$f(-1) = 1$$

$$f(0) = 0 \quad f(A) = \{0, 1\} \text{ dır.}$$

$$f(1) = 1$$

$f(A) = B$ olduğundan f örtendir.

3- $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ kümeleri veriliyor. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu örten bir fonksiyon mudur? (f ; A dan B ye bir fonksiyon)

Cevap:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

$f(A) = \{1, 2, 5, 10\} \neq B$ olduğundan, f içine fonksiyondur.